

Поліщук Альона,
магістрантка, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – Дідківська Т. В.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Актуальність теми полягає в тому, що розв'язання систем рівнянь цікавить людство вже багато століть. До того ж, не всяка система рівнянь у результаті перетворень або за допомогою вдалої заміни змінної може бути зведена до системи рівнянь того або іншого стандартного вигляду, для якої існує певний алгоритм розв'язування. У таких випадках іноді виявляється корисним використовувати інші методи розв'язування, мова про які й піде в ході даної роботи.

Мета статті: розкрити зміст основних і штучних методів розв'язування систем рівнянь.

Розглянемо циклічні системи рівнянь та методи для їх розв'язування.

Розглянемо систему рівнянь в загальному вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0, \\ F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) = 0, \\ \\ F(x_{n-1}, x_n, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}) = 0, \\ F(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

де вираз F залежить від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n \in X \subset R$. Важливою особливістю цієї системи є те, що за циклічної заміни змінних $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_1$ маємо систему

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) = 0, \\ F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) = 0, \\ \\ F(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \\ F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

яка відрізняється від неї тільки порядком розміщення рівнянь, тобто співпадає з системою (1). Системи рівнянь вигляду (1) називають **циклічними**.

Для циклічних систем рівнянь справедливі всі методи, що застосовуються і до розв'язування систем лінійних рівнянь, але є ще один метод, який допомагає звести розв'язування системи до розв'язування одного рівняння. Розглянемо його на прикладі [3].

Метод зведення до виродженого рівняння

Приклад 1.
$$\begin{cases} x - y = \sin x, \\ y - x = \sin y. \end{cases}$$

Розв'язання. Покладемо $x = y = t$ і запишемо вироджене рівняння системи $\sin t = 0$. Його розв'язками є числа πn , де $n \in \mathbb{Z}$. Тому $(\pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$ – розв'язки даної системи.

Доведемо, що інших розв'язків система не має. Припустимо, $x = a, y = b$ – розв'язок системи, причому $a \neq b$. Тоді, підставляючи його в рівняння системи і віднімаючи від першої рівності відповідні частини другої, маємо рівність

$$2(a - b) = \sin a - \sin b \Leftrightarrow a - b = \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{2}.$$

Оскільки

$$\left| \sin \frac{a - b}{2} \right| \leq \frac{|a - b|}{2} \text{ і } \left| \cos \frac{a + b}{2} \right| \leq 1,$$

то з останньої рівності дістаємо суперечливу нерівність: $|a - b| \leq \frac{|a - b|}{2}$.

Тому система не має розв'язків, відмінних від знайдених.

Відповідь. $(\pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Зупинимось на розгляді методів розв'язування деяких нестандартних систем рівнянь

Функціональний метод

Приклад 2. Розв'язати систему:
$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Система має три невідомі величини, але для її розв'язання можна застосувати властивість монотонності.

Розглянемо функцію $f(t) = t + \sin t$, вона монотонно зростає для всіх дійсних x . Тоді рівняння $\sin y - \sin x = x - y$ рівносильне рівнянню $x = y$, а рівняння $\sin y - \sin z = z - y$ – рівнянню $y = z$. Отже, для розв'язування вихідної системи достатньо розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = y, \\ y = z, \\ x - y + z = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi, \\ y = \pi, \\ z = \pi. \end{cases}$$

Відповідь. $(\pi; \pi; \pi)$.

Використання властивостей модуля до розв'язування систем рівнянь

Приклад 3. Розв'язати систему :
$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 - 4xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Враховуючи, що $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ та $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

використовуючи геометричний зміст модуля, впливає, що $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq 2$ для всіх x та y . Отже, рівність виконується при $y = 0, |x| \leq 1$. Тоді з другого рівняння системи отримуємо $x=0$.

Відповідь: $(0; 0)$.

Отже, у статті було розглянуто деякі з найбільш цікавих методів розв'язування систем рівнянь: метод зведення до виродженого рівняння, функціональний метод та метод, що ґрунтується на застосуванні властивостей модуля; наведено приклади, що демонструють використання цих методів на практиці. Оскільки в статті розглядаються лише деякі методи, то перспективою подальших досліджень є вивчення інших методів розв'язування систем рівнянь.

Література

1. Гайштут О. Г. Розв'язування алгебраїчних задач / Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. – К. : Рад. шк., 1991.
2. Каплан Я. Л. Рівняння / Каплан Я. Л.. – К. : Радянська школа, 1968. – 406 с.
3. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики / О. М. Вороний. – Х. : Вид. група «Основа», 2008. – К. 2. – 141 с.